Teorema della funzione implicita

Teorema della funzione implicita

Teorema 1 (Teorema di Dini)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$ che contiene l'origine $(0,0)$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione in $C^1(\Omega)$ tale che*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad \partial_x F(0,0) \neq 0.$$

Allora esistono $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ ed una funzione $\eta : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to (-\delta_0, \delta_0)$ tali che:

(i) η è continua e derivabile con continuità in $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ ed è tale che $\eta(0) = 0$.

(ii) il grafico di η coincide con l'insieme di livello

$$\mathcal{N}_u = \Big\{(x,y) \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times (-\delta_0, \delta_0) \ : \ F(x,y) = 0\Big\},$$

cioè, se $(x,y) \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times (-\delta_0, \delta_0)$, allora

$$F(x,y) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x = \eta(y).$$

Lemma 2 (Derivabilità della funzione implicita)**.** *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Supponiamo che*

$$\eta : (a,b) \to \mathbb{R}$$

sia una funzione continua tale che

$$F\big(\eta(t), t\big) = costante \qquad \text{per ogni} \qquad t \in (a,b),$$

$$e \qquad \partial_x F\big(\eta(t), t\big) > 0 \qquad \text{per ogni} \qquad t \in (a,b).$$

Allora, η è differenziabile su (a,b) e

$$\eta'(t)\partial_x F\big(\eta(t), t\big) + \partial_y F\big(\eta(t), t\big) = 0 \qquad \text{per ogni} \qquad t \in (a,b).$$

Dimostrazione: Sia $t \in (a,b)$ e sia s abbastanza piccolo. Allora

$$\begin{aligned} 0 &= F\big(\eta(t+s), t+s\big) - F\big(\eta(t), t\big) \\ &= F\big(\eta(t+s), t+s\big) - F\big(\eta(t), t+s\big) \\ &\qquad + F\big(\eta(t), t+s\big) - F\big(\eta(t), t\big) \\ &= \Big(\eta(t+s) - \eta(t)\Big)\partial_x F\big(\kappa(t,s), t+s\big) + s\,\partial_y F\big(\eta(t), h(t,s)\big), \end{aligned}$$

dove $\kappa(t,s)$ sta tra $\eta(t+s)$ e $\eta(t)$, e $h(t,s)$ è compreso tra $t+s$ e t. Dividento tutto per s abbiamo

$$\frac{\eta(t+s) - \eta(t)}{s} = -\frac{\partial_y F\big(\eta(t), h(t,s)\big)}{\partial_x F\big(\kappa(t,s), t+s\big)}.$$

Passando al limite per $s \to 0$, abbiamo la tesi. $\square$

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange in dimensione due

Teorema 3 (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$ e siano $F:\Omega\to\mathbb{R}$ e $G:\Omega\to\mathbb{R}$ due funzioni in $C^1(\Omega)$. Sia $\mathcal{N}_g$ l'insieme*

$$\mathcal{N}_G=\Big\{X\in\Omega:\ G(X)=0\Big\}.$$

Se $X_0\in\mathcal{N}_G$ è un punto di massimo (o minimo) relativo per la funzione F sull'insieme $\mathcal{N}_G$, allora è vera una delle affermazioni seguenti :

(a) $\nabla G(X_0)=0$*;*

(b) *esiste $\lambda\in\mathbb{R}$ tale che $\nabla F(X_0)-\lambda\nabla G(X_0)=0$.*

Dimostrazione: Sia $X_0=(x_0,y_0)$. Supponiamo che $\nabla G(x_0,y_0)\neq 0$. Allora, $\partial_x G(x_0,y_0)\neq 0$ oppure $\partial_y G(x_0,y_0)\neq 0$. Senza perdita di generalità, possiamo supporre che $\partial_x G(x_0,y_0)\neq 0$. Per il teorema della funzione implicita, esistono $\varepsilon>0$, $\delta>0$ ed una funzione η definita su $(y_0-\delta,y_0+\delta)$ a valori in $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ tale che dato un punto

$$(x,y)\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\times(y_0-\delta,y_0+\delta),$$

si ha che

$$G(x,y)=0\qquad\text{se e solo se}\qquad x=\eta(y).$$

Ora, siccome $F:\mathcal{N}_G\to\mathbb{R}$ ha un minimo relativo in (x_0,y_0), abbiamo che la funzione

$$y\mapsto F\big(\eta(y),y\big)$$

ha un minimo relativo in y_0. Di conseguenza,

$$\begin{aligned}0=\frac{d}{dy}\Big|_{y=y_0}F\big(\eta(y),y\big)&=\eta'(y_0)\partial_x F\big(\eta(y_0),y_0\big)+\partial_y F\big(\eta(y_0),y_0\big)\\&=\eta'(y_0)\partial_x F\big(x_0,y_0\big)+\partial_y F\big(x_0,y_0\big)\\&=-\frac{\partial_y G\big(x_0,y_0\big)}{\partial_x G\big(x_0,y_0\big)}\partial_x F\big(x_0,y_0\big)+\partial_y F\big(x_0,y_0\big).\end{aligned}\tag{$*$}$$

Cerchiamo λ tale che

$$\begin{cases}\partial_x F(x_0,y_0)=\lambda\,\partial_x G(x_0,y_0)\\ \partial_y F(x_0,y_0)=\lambda\,\partial_y G(x_0,y_0).\end{cases}$$

Scegliamo

$$\lambda:=\frac{\partial_x F(x_0,y_0)}{\partial_x G(x_0,y_0)}.$$

In questo modo, la prima eguaglianza è automaticamente soddisfatta. La seconda invece segue da $(*)$.

Esercizio 4. *Dimostrare che per ogni $x,y,z\in\mathbb{R}$ si ha*

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}\geq\frac{x+y+z}{3}\ .$$

Esercizio 5. *Trovare i massimi delle funzioni*

$$f(x,y,z)=xyz\ ,\qquad g(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\qquad e\qquad h(x,y,z)=xy+yz+zx\ .$$

sulla sfera $\quad\partial B_1=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2=1\Big\}.$

Esercizio 6. *Per ogni $a>0$ ed ogni $b>0$, consideriamo il rettangolo $\mathcal{R}_{ab}=[0,a]\times[0,b]$. Il perimetro e l'area di $\mathcal{R}_{ab}$ sono rispettivamente*

$$\mathrm{Per}\,(\mathcal{R}_{ab})=2a+2b\qquad e\qquad \mathrm{Area}\,(\mathcal{R}_{ab})=ab\ .$$

Sia $P>0$. Fra tutti i rettangoli di perimetro P trovare quello con area più grande.